Forma algebrica dei numeri complessi

Sia $z \in \mathbb{C}$, esso può essere rappresentato in forma algebrica:

$$z = a + ib$$

dove:

- $a = \mathrm{Re}(z)$ è la parte reale di z,
- $b = \mathrm{Im}(z)$ è la parte immaginaria di z,
- i è l'unità immaginaria tale che per $k = 0, 1, 2, \cdots$ si ha:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

Calcolare le seguenti potenze:

- $i^{2019} =$
- $i^{1990} =$
- $i^{101} =$
- $i^{101^2} =$

Forma algebrica dei numeri complessi

Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$, si definiscono:

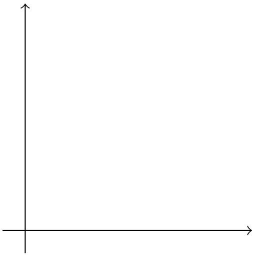
- modulo di z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- coniugato di z: $\bar{z} = a - ib$,
  proprietà:
  $$z\bar{z} = |z|^2,$$
- se $z \neq 0$:
  $$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$$
- opposto di z: $-z = a - ib$
- somma e prodotto:
  $$z + w = (a + c) + i(b + d), \qquad z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Forma trigonometrica:

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- $\theta \in \mathbb{R}$ è un argomento del numero complesso.
- $\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = |z|\cos\theta \\ \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\theta \end{cases}$
- $\mathrm{Arg}(z) := \{\theta \in \mathbb{R} \;:\; z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}$
- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$



Forma esponenziale dei numeri complessi

Sia $z = a + ib$. L'esponenziale complesso è definito come:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Dalla definizione segue:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Quindi la forma esponenziale di un numero complesso è:

$$z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} = e^{\log(|z|)+i\theta}.$$

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|}e^{-i\theta_1}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- $z^n = |z|e^{in\theta}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad k = 0, 1, \cdots n-1$$

Esercizi sui numeri complessi

1. Riscrittura di
$$\frac{1-i}{1+i} = \ldots = i$$
2. Calcolare
$$(1-i\sqrt{3})^9$$
3. Determinare forma algebrica, modulo e argomento di
$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i$$
4. Determinare la forma trigonometrica di
$$z = \sqrt{3} + i$$
5. Calcolare
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$$

Esercizi sui numeri complessi

6. Determinare forma algebrica, modulo e argomento di

$$z_1 = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}, \qquad z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{62}, \qquad z_3 = (\sqrt{3} - i)^6$$

7. Determinare la forma esponenziale di $z = \sqrt{3} + i$ e calcolare z^{-1}
8. Calcolare z^6 con $z = (1-i)\left(-1+\sqrt{3}i\right)$
9. Calcolare z^{37} con $z = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2+2i}\right)$
10. Calcolare $\sqrt[3]{-1}$
11. Calcolare $\sqrt[4]{1}$
12. Calcolare $\sqrt[3]{2+2i}$
13. Calcolare l'area del poligono regolare avente i vertici in $\sqrt[4]{-49}$

Esercizi sui numeri complessi

14. Calcolare la forma cartesiana delle 5 soluzioni complesse di

$$\left(z^3 + 343i\right)(z - 2i - 1)^2 = 0$$

15. Siano z_0 e z_1 le soluzioni dell'equazione

$$(z-2)^2 = -i,$$

    trovare $z_0 + z_1$

16. Calcolare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^4 = \left(|\sqrt{3} - i|^2 \frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^5 \mathrm{Im}(3+2i)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

17. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-7}{z}\right) = 0$$

Esercizi sui numeri complessi

18. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\mathrm{Re}(z^2 + z\overline{z} + iz + 1) = 0$$

19. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$5(z + \overline{z}) + z^2 = i + 10\mathrm{Re}(z)$$

20. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$z + \overline{z} > |z|^2$$

21. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$(1 + i)z \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

22. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$|z|(|z + 7|) = |z|^2$$

Esercizi sui numeri complessi

23. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$|z-(3+i)| \leq 2 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(z^2+7i)-(\mathrm{Re}(z))^2=0$$

24. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\left[|z-3i|^2+\mathrm{Re}(z+6\overline{z})\mathrm{Im}(z-\overline{z})i-(7i+1)z\overline{z}\right] \in \mathbb{R}$$

25. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\mathrm{Re}\left[z\overline{z}+7\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{7i}\right)+z(1+i)+3e^{i\frac{5}{2}\pi}\right]=0$$

26. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz\overline{z}+2z+4\overline{z})<6 \\ \mathrm{Im}(iz\overline{z}+2z+4\overline{z})=0 \end{cases}$$

Esercizi sui numeri complessi

27. Determinare quante sono le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = (\overline{z})^7$$

28. Posto $k = (73)^2$, il numero complesso i^k vale....
29. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\frac{\overline{z}}{z} = iz$$

30. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$z|z| - 2z - 1 = 0$$

31. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\left(|z|^2 - 4z\right)\left(|z - 5i| - 6\right) = 0$$

Esercizi sui numeri complessi

32. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\frac{7}{e^{i\frac{\pi}{2}}}z^2\overline{z} + \frac{\mathrm{Im}z}{e^{3i\pi}} + i7|z|^2\mathrm{Re}z = 0$$

33. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\left[|z+iz|^2 - (z+3)\,\overline{z}\right] \mathrm{Im}\left(\frac{-i}{|z|+i}\right) = 0$$

34. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dagli z tali che

$$\begin{cases} z^3 + \overline{i7^3} = 0 \\ |z - |z|^2 + z\overline{z} + 8| \leq \left|\frac{8e^{2\pi i}}{i}\right| \end{cases}$$

35. Trovare $A \cap B$ con

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z \leq \frac{1}{2}|\mathrm{Re}z|\}$$